

2021 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $2(z + \bar{z}) + 3(z - \bar{z}) = 4 + 6i$ ，则 $z =$

- A. $1 - 2i$ B. $1 + 2i$ C. $1 + i$ D. $1 - i$

2. 已知集合 $S = \{s | s = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$ ， $T = \{t | t = 4n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$ ，则 $S \cap T =$

- A. $\emptyset$ B. S C. T D. $\mathbb{Z}$

3. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbb{R}, \sin x < 1$ ；命题 $q: \forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1$ ，则下列命题中为其命题的是

- A. $p \wedge q$ B. $\neg p \wedge q$ C. $p \wedge \neg q$ D. $\neg(p \vee q)$

4. 设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ，则下列函数中为奇函数的是

- A. $f(x-1)-1$ B. $f(x-1)+1$ C. $f(x+1)-1$ D. $f(x+1)+1$

5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， P 为 B_1D_1 的中点，则直线 PB 与 AD_1 所成的角为

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

6. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训，每名志愿者只分配到 1 个项目，每个项目至少分配 1 名志愿者，则不同的分配方案共有

- A. 60 种 B. 120 种 C. 240 种 D. 480 种

7. 把函数 $y = f(x)$ 图像上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把所得

曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 的图像, 则 $f(x) =$

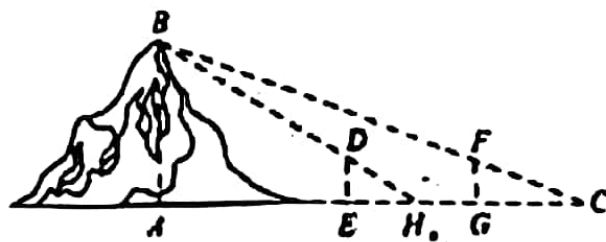
- A. $\sin(\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{12})$ (B) $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})$
 C. $\sin(2x - \frac{7\pi}{12})$ D. $\sin(2x + \frac{\pi}{12})$

8. 在区间 $(0, 1)$ 与 $(1, 2)$ 中各随机取 1 个数, 则两数之和大于 $\frac{7}{4}$ 的概率为

- A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{23}{32}$ (C) $\frac{9}{32}$ D. $\frac{2}{9}$

9. 魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作, 其中第一题是测量海岛的高. 如图, 点 E, H, G 在水平线 AC 上, DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度, 称为“表高”,

EG 称为“表距”, GC 和 EH 都称为“表目距”, GC 与 EH 的差称为“表目距的差”, 则海岛的高 $AB =$



- A. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}$ B. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表高}$
 C. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表距}$ D. $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表距}$

10. 设 $a \neq 0$, 若 $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则

- A. $a < b$ B. $a > b$ C. $ab < a^2$ D. $ab > a^2$

11. 设 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点, 若 C 上的任意一点 P 都满足

$|PB| \leq 2b$, 则 C 的离心率的取值范围是

- A. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ B. $[\frac{1}{2}, 1)$ C. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ D. $(0, \frac{1}{2}]$

12. 设 $a = 2\ln 1.01$, $b = \ln 1.02$, $c = \sqrt{1.04} - 1$, 则

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

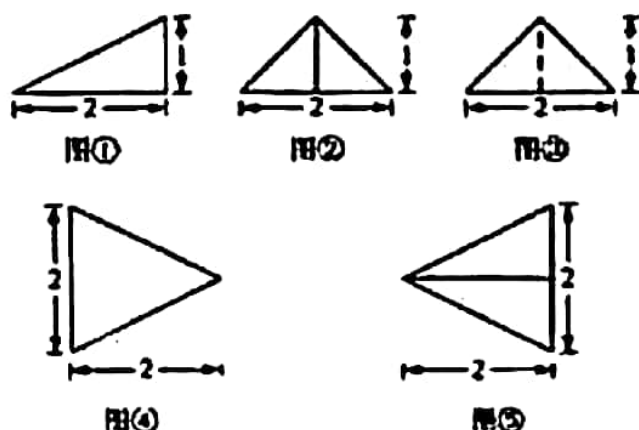
二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{m} - y^2 = 1 (m > 0)$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x + my = 0$ ，则 C 的焦距为_____。

14. 已知向量 $a = (1, 3)$ ， $b = (3, 4)$ ，若 $(a - \lambda b) \perp b$ ，则 $\lambda =$ _____。

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，面积为 $\sqrt{3}$ ， $B = 60^\circ$ ， $a^2 + c^2 = 3ac$ ，则 $b =$ _____。

16. 以图①为正视图，在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图，组成某个三棱锥的三视图，则所选侧视图和俯视图的编号依次为_____（写出符合要求的一组答案即可）。



三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17. (12分)

某厂研制了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了10件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ ，样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2 。

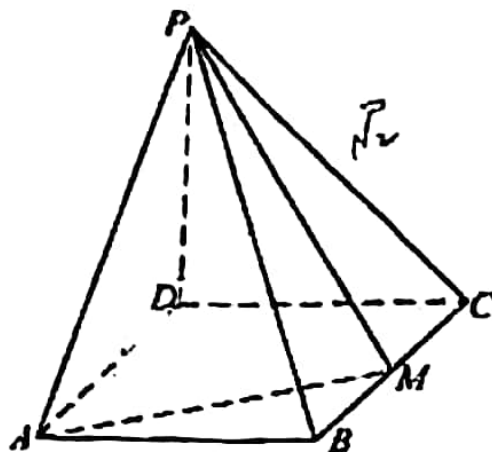
(1) 求 $\bar{x}$ ， $\bar{y}$ ， s_1^2 ， s_2^2 ；

(2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高（如果

$\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}}$ ，则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高，否则不认为有显著提高）。

18. (12分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $PD = DC = 1$, M 为 BC 的中点, 且 $PB \perp AM$.



(1) 求 BC ;

(2) 求二面角 $A-PM-B$ 的正弦值.

19. (12分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积, 已知 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$.

(1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. (12分)

设函数 $f(x) = \ln(a-x)$, 已知 $x=0$ 是函数 $y = xf(x)$ 的极值点.

(1) 求 a ;

(2) 设函数 $g(x) = \frac{x+f(x)}{xf(x)}$. 证明: $g(x) < 1$.

21. (12分)

已知抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 且 F 与圆 $M: x^2 + (y+4)^2 = 1$ 上点的距离的最小值为 4.

(1) 求 p ;

(2) 若点 P 在 M 上, PA, PB 是 C 的两条切线, A, B 是切点, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.