参考答案、提示及评分细则

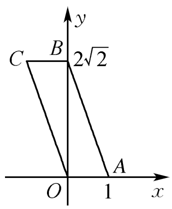
1. C　$\because z(1+\mathrm{i})^2=1-\mathrm{i}\Leftrightarrow z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$，$\therefore$复数 z 在复平面上的对应的点是$\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，位于第三象限.

2. B　由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，得 $\sin A=\dfrac{a\sin C}{c}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. D

4. C　$\because$角 α 与角 β 的两边分别平行，$\therefore\alpha$ 与 β 相等或互补，又 $\alpha=30°$，$\therefore\beta=30°$或 $150°$.

5. D　直观图如图所示：



由图知：原图形的面积为 $1\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

6. A　向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(4,-4)$，则 $m\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{b}=(2m-4n,4n-m)$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(0,2)$，由 $m\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共线，可得 $2m-4n=0$，$\therefore\dfrac{m}{n}=2$.

7. C　若 $\alpha\perp\beta$，$l\subset\alpha$，可以有 $l\perp\beta$、l 与 β 斜交、$l/\!/\beta$，故 C 错.

8. C　由题意得$\angle ACB=60°$，$AB^2=a^2+(3a)^2-2a\cdot3a\cdot\dfrac{1}{2}=7a^2$，所以 $AB=\sqrt{7}a$.

9. D　选取$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$为基底，则$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$，又$\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AF}=\lambda(\overrightarrow{AB}++\overrightarrow{AD})+\mu\left(\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\left(\lambda+\dfrac{\mu}{3}\right)\overrightarrow{AB}+(\lambda+\mu)\overrightarrow{AD}$，将以上两式比较系数可得 $\lambda+\mu=-1$.

10. A　$\because\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，$\therefore c^2-b^2=ac\cos B$，由余弦定理化简可得：$c^2=a^2+b^2$，$\therefore\triangle ABC$ 是直角三角形.

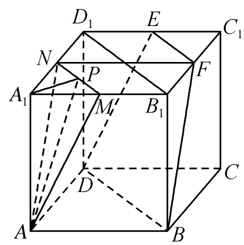
11. B　设 $BE=x$，$EC=y$，则 $BC=AD=x+y$. 因为 $SA\perp$平面 $ABCD$，$ED\subset$平面 $ABCD$，所以 $SA\perp ED$. 又 $AE\perp ED$，$SA\cap AE=A$，所以 $ED\perp$平面 SAE，则 $ED\perp SE$.

易知 $AE=\sqrt{x^2+3}$，$ED=\sqrt{y^2+3}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 中，$AE^2+ED^2=AD^2$，

即 $x^2+3+y^2+3=(x+y)^2$，化简得 $xy=3$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle SED$ 中，$SE=\sqrt{x^2+12}$，$ED=\sqrt{y^2+3}=\sqrt{\dfrac{9}{x^2}+3}$. 所以 $S_{\triangle SED}=\dfrac{1}{2}SE\cdot ED=\dfrac{1}{2}\sqrt{3x^2+\dfrac{108}{x^2}+45}$.

因为 $3x^2+\dfrac{108}{x^2}\geqslant2\sqrt{3x^2\cdot\dfrac{108}{x^2}}=36$，当且仅当 $x=\sqrt{6}$，$y=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$时等号成立，所以 $S_{\triangle SED}\geqslant\dfrac{1}{2}\sqrt{36+45}=\dfrac{9}{2}$.

12. B　如图所示，分别取棱 A_1B_1、A_1D_1 的中点 M、N，连接 MN，连接 B_1D_1，$\because M$、N、E、F 为所在棱的中点，$\therefore MN/\!/B_1D_1$，$EF/\!/B_1D_1$，$\therefore MN/\!/EF$，又 $MN\not\subset$平面 $BDEF$，$EF\subset$平面 $BDEF$，$\therefore MN/\!/$平面 $BDEF$；连接 NF，由 $NF/\!/A_1B_1$，$NF=A_1B_1$，$A_1B_1/\!/AB$，$A_1B_1=AB$，可得 $NF/\!/AB$，$NF=AB$，则四边形 $ANFB$ 为平行四边形，则 $AN/\!/FB$，而 $AN\not\subset$平面 $BDEF$，$FB\subset$平面 $BDEF$，则 $AN/\!/$平面 $BDEF$. 又 $AN\cap NM=N$，$\therefore$平面 $AMN/\!/$平面 $BDEF$. 又 P 是上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内一点，且



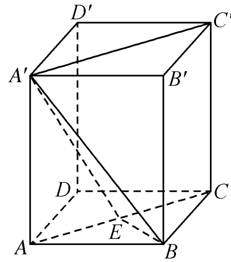
AP∥平面 $BDEF$，∴P 点在线段 MN 上. 又 $MN=\frac{1}{2}B_1D_1$，∴P 点的轨迹长为$\sqrt{2}$.

13. $1+\mathrm{i}$　$\mathrm{i}^{2020}+\mathrm{i}^{2021}=\mathrm{i}^{4\times505}+\mathrm{i}^{4\times505+1}=1+\mathrm{i}$.

14. $\sqrt{7}$　∵$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2-4|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=1+4-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$，∴$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$.

15. 27　由已知得 $EF\parallel BD$，$EG\parallel BC$，$FG\parallel DC$，∴$\triangle EFG\backsim\triangle BDC$，∴$\frac{\triangle EFG\text{的周长}}{\triangle BDC\text{的周长}}=\frac{EF}{BD}$，又∵$\frac{EF}{BD}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{3}$，∴$\frac{\triangle EFG\text{的周长}}{\triangle BDC\text{的周长}}=\frac{1}{3}$，∴$\triangle BCD$ 的周长$=9\times3=27$.

16. 5π　作 $BE\perp AC$，垂足为 E，连接 $A'E$，BE. ∵平面 $ABC\perp$平面 $ACC'A'$，平面 $ABC\cap$平面 $ACC'A'=AC$，$BE\subset$平面 ABC，∴$BE\perp$平面 $ACC'A'$，∴$\angle BA'E$ 是 $A'B$ 与平面 $ACC'A'$所成的平面角.



又 $BE=\frac{\sqrt{3}\times1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$A'B=\sqrt{(\sqrt{3})^2+AA'}=\sqrt{3+AA'^2}$.

∴$\sin\angle BA'E=\frac{BE}{A'B}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3+AA'^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，解得 $AA'=1$.

故该长方体的体对角线为$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{5}$. 设长方体的外接球的半径为 R，则 $2R=\sqrt{5}$，解得 $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

∴该长方体的外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=5\pi$.

17. 解：(1)将 $z=2-a\mathrm{i}$ 代入$(1-2\mathrm{i})z$ 得$(1-2\mathrm{i})\cdot z=(1-2\mathrm{i})(2-a\mathrm{i})=2-2a-(a+4)\mathrm{i}$，…………… 2 分

∵$(1-2\mathrm{i})z$ 为纯虚数，∴$\begin{cases}2-2a=0,\\a+4\neq0,\end{cases}$ 解得 $a=1$，∴复数 $z=2-\mathrm{i}$. …………… 5 分

(2)由(1)知 $z=2-\mathrm{i}$，∴$\omega=\frac{z}{3+\mathrm{i}}=\frac{2-\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}=\frac{(2-\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{(3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}=\frac{5-5\mathrm{i}}{10}=\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}$，…………… 8 分

$|\omega|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. …………… 10 分

18. 证明：(1)设 $AC\cap BD=O$，则 O 是 AC，BD 中点，连接 PO，

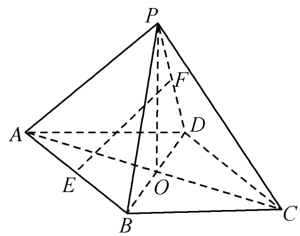
∵底面 $ABCD$ 是菱形，∴$BD\perp AC$，…………… 2 分

又∵$PA=PC$，O 是 AC 中点，

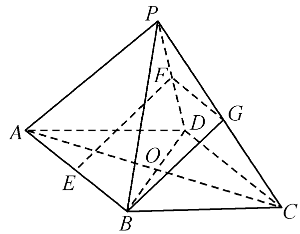
∴$AC\perp PO$，…………… 4 分

又 $BD\cap PO=O$，$BD\subset$平面 PBD，$PO\subset$平面 PBD，

∴$AC\perp$平面 PBD. …………… 6 分



(2)取 PC 的中点 G，连接 FG，BG，如图所示：



∵F 是 PD 的中点，

∴$FG\parallel CD$，且 $FG=\frac{1}{2}CD$，…………… 7 分

又∵底面 $ABCD$ 是菱形，E 是 AB 中点，

∴$BE\parallel CD$，且 $BE=\frac{1}{2}CD$，

∴$BE\parallel FG$，且 $BE=FG$，…………… 8 分

∴四边形 $BEFG$ 是平行四边形，

∴$EF\parallel BG$，…………… 10 分

又 $EF\not\subset$平面 PBC，$BG\subset$平面 PBC，

∴$EF\parallel$平面 PBC. …………… 12 分

19. 解：(1)如果按方案一：仓库的底面直径变成 20，

则仓库的体积 $V_1=\frac{1}{3}sh=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{20}{2}\right)^2\times6=200\pi(\mathrm{cm}^3)$； ………………………………………… 2 分

如果按方案二：仓库的高变成 10 m，

则仓库体积 $V_2=\frac{1}{3}sh=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{16}{2}\right)^2\times10=\frac{640}{3}\pi(\mathrm{cm}^3)$； ………………………………………… 4 分

(2)按方案一：圆锥母线长为 $l_1=\sqrt{10^2+6^2}=2\sqrt{34}$， ………………………………………… 5 分

则仓库侧面积为：$S_1=\pi\times10\times2\sqrt{34}=20\sqrt{34}\pi(\mathrm{cm}^2)$， ………………………………………… 7 分

按方案二：圆锥的母线长为 $l_2=\sqrt{8^2+10^2}=2\sqrt{41}$， ………………………………………… 8 分

则仓库侧面积为：$S_2=\pi\times8\times2\sqrt{41}=16\sqrt{41}\pi(\mathrm{cm}^2)$ ………………………………………… 10 分

(3)$\because V_2>V_1$，$S_2<S_1$，$\therefore$方案二比方案一更加经济. ………………………………………… 12 分

20. 解：(1)由余弦定理及 $c^2-a^2=bc\cos A-\frac{1}{2}ab$，

得 $2c^2-2a^2=b^2+c^2-a^2-ab$， ………………………………………… 2 分

$\therefore a^2+b^2-c^2=ab$，$\therefore 2ab\cos C=ab$，$\therefore \cos C=\frac{1}{2}$. ………………………………………… 4 分

$\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………… 5 分

(2)由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=4$，

$\therefore a=4\sin A$，$b=4\sin B$， ………………………………………… 6 分

$\therefore a+b=4\sin A+4\sin B=4\sin A+4\sin(A+C)$

$=4\sin A+4\sin A\cos C+4\cos A\sin C=6\sin A+2\sqrt{3}\cos A=4\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$ ………………………………………… 9 分

$\because A\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，$\therefore A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，$\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\in(\frac{1}{2},1]$，

$\therefore a+b\in(2\sqrt{3},4\sqrt{3}]$. ………………………………………… 12 分

21. (1)证明：在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BB_1\perp$底面 ABC，$CD\subset$平面 ABC，所以 $BB_1\perp CD$，

又知 $BC=AC$，D 为 AB 的中点，所以 $CD\perp AB$；

又 $BB_1\cap AB=B$，且 BB_1，$AB\subset$平面 ABB_1A_1，所以 $CD\perp$平面 ABB_1A_1，

因为 $B_1D\subset$平面 ABB_1A_1，所以 $CD\perp B_1D$. ………………………………………… 2 分

由 $BD=CD=DA$ 可知$\angle ACB=90^\circ$，不妨设 $BB_1=BC=2a$，即 $AE=a$，则 $AB=2\sqrt{2}a$，所以 $BD=DA=\sqrt{2}a$，

则 $\frac{BB_1}{BD}=\frac{DA}{AE}$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle B_1BD\backsim\mathrm{Rt}\triangle DAE$，则$\angle ADE=\angle BB_1D$，所以$\angle B_1DE=90^\circ$，即 $B_1D\perp DE$，………………………………………… 5 分

因为 $CD\cap DE=D$，且 CD，$DE\subset$平面 CDE，所以 $B_1D\perp$平面 CDE.

又 $B_1D\subset$平面 B_1CD，所以平面 $B_1CD\perp$平面 CDE. ………………………………………… 6 分

(2)解：由(1)及 $BD=1$ 可得，$AC=BC=BB_1=\sqrt{2}$且 $CD\perp$平面 B_1DE.

设点 D 到平面 B_1CE 的距离为 h，

则 $V_{D-B_1CE}=V_{C-B_1DE}$.

在$\triangle B_1CE$ 中，$B_1C^2=BB_1^2+BC^2=4$

$CE^2=AC^2+AE^2=\frac{5}{2}$，

$B_1E^2=A_1B_1^2+A_1E^2=\frac{9}{2}$

$\therefore B_1C=2$，$CE=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，$B_1E=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$， ………………………………………………………………… 8 分

由余弦定理得 $\cos\angle B_1EC=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\therefore \sin\angle B_1EC=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\triangle B_1CE$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{3}{2}$，……

…… 10 分

又 $B_1D=\sqrt{3}$，$DE=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$S_{\triangle B_1DE}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. ……………………………………………… 11 分

$\therefore \dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\times 1$.

$\therefore h=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即点 D 到平面 B_1CE 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………………… 12 分

22.(1)证明：连接 OF.

$\because$ 底面 $ABEF$ 是等腰梯形，$AB/\!/EF$，$AB=2EF=2$，O 是 AB 中点 F，

$\therefore$ 四边形 $OBEF$ 为平行四边形，$\therefore OF=BE=1$，

$\therefore OF=\dfrac{1}{2}AB$，$\therefore AF\perp BF$. ………………………………………………………………… 2 分

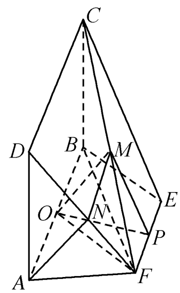
$\because$ 平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，$CB\perp AB$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABEF=AB$，

$\therefore CB\perp$ 平面 $ABEF$. ………………………………………………………………………… 3 分

$\because AF\subset$ 平面 $ABEF$，$\therefore AF\perp CB$.

又 $\because CB\cap BF=B$，$\therefore AF\perp$ 平面 CBF. ……………………………………………………………… 4 分

(2)解：如图，过 M 作 $MN/\!/DC$，MN 与 DF 交于点 N，



又 $\because DC/\!/AO$，$\therefore MN/\!/AO$，

$\because OM/\!/$ 平面 ADF，$OM\subset$ 平面 $OMNA$，平面 $OMNA\cap$ 平面 $ADF=AN$，

$\therefore OM/\!/AN$，$\therefore$ 四边形 $MNAO$ 为平行四边形，

$\therefore MN=AO=\dfrac{1}{2}DC$，$N$、$M$ 为 FC、DF 的中点. ……………………………………… 8 分

取 EF 中点 P，连接 MP，OP.

$\because M$，N 为 CF，DF 中点，$\therefore MP/\!/CE$，

$\therefore \angle OMP$ 即为异面直线 OM 与 CE 所成角. ……………………………………………………… 9 分

由题可求得 $OM=AN=\dfrac{1}{2}DF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$MP=\dfrac{1}{2}CE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$OP=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， ……………………………………… 10 分

$\therefore \cos\angle OMP=\dfrac{OM^2+MP^2-OP^2}{2OM\cdot MP}=\dfrac{1}{4}$，

即异面直线 OM 与 CE 所成角的余弦值为 $\dfrac{1}{4}$. ………………………………………………… 12 分